Colles de Maths - semaine 1 - MP*2
Lycée du Parc

Julien Allasia - ENS de Lyon

Choses à retenir

— En dimension finie, penser à utiliser des supplémentaires.

— Introduire des applications linéaires bien choisies (dont la surjectivité ou l'injectivité est claire).

— Bien comprendre l'intérêt majeur de la dimension finie : transformer une CN en CNS, une inclusion en égalité, une application linéaire injective ou surjective en isomorphisme, une somme en somme directe...

— Bien comprendre le lien entre matrice et application linéaire et savoir basculer de l'une à l'autre, plutôt que de voir une matrice seulement en tant que telle

Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 1 (*)

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, E^* son espace dual. Soit $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E^*. Montrer qu'il existe une base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E telle que pour tout i, $e_i^* = f_i$.
2. On suppose maintenant que E est de dimension infinie, et admet une base $(e_i)_{i\in I}$. La famille $(e_i^*)_{i\in I}$ est-elle libre ? génératrice ?

Exercice 2 (*) Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit $k \in \{1, ..., n-1\}$. Que dire d'un endormorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ qui stabilise tous les sous-espaces de E de dimension k ?

Exercice 3 (*) Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que

$$rg(g) \leq rg(f) \iff \exists\, h \in GL(F), k \in \mathcal{L}(E),\ h \circ g = f \circ k.$$

Exercice 4 (**) Soit E, F, G, H quatre K-espaces vectoriels de dimension finie, $a \in \mathcal{L}(E, F)$, $b \in \mathcal{L}(G, H)$ et $\psi_{a,b}$ l'application de $\mathcal{L}(F, G)$ dans $\mathcal{L}(E, H)$ définie par

$$\psi_{a,b}(u) = b \circ u \circ a.$$

Déterminer l'image de $\psi_{a,b}$ en fonction de a et b.
Indication : commencer par déterminer la dimension du noyau.

Exercice 5 (***) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $p_1, ..., p_m$ des projecteurs de E. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i$ est un projecteur si et seulement si pour tous $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$.

Indication : Pour le sens direct, montrer que $\mathrm{Im}\left(\displaystyle\sum_i p_i\right) = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Im}(p_i)$.
Pour les meilleurs : donner une condition sur K pour que le résultat soit vrai en remplaçant $\mathbb{C}$ par K et donner un exemple de corps K ne vérifiant pas cette condition pour lequel le résultat est faux.

Matrices

Exercice 6 (*) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Montrer que A est de rang 1 si et seulement s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ non nulles telles que $A = X^tY$.

Exercice 7 (*) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension m et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{C}$ de F telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = A$.

Exercice 8 (*) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 4, et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre 2. Soit $C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une base de E telle que la matrice de u dans cette base soit $\begin{pmatrix} C_2 & O \\ O & O \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} C_2 & O \\ O & C_2 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 (*) Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ non constante telle que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ f(AB) = f(A)\,f(B)$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est inversible si et seulement si $f(A) \neq 0$.

Exercice 10 (***) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$tr(A) = 0 \iff \exists B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ A = BC - CB.$$

Indication : Montrer qu'une matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.
Pour les meilleurs : donner une condition sur K pour que le résultat soit encore vrai pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$